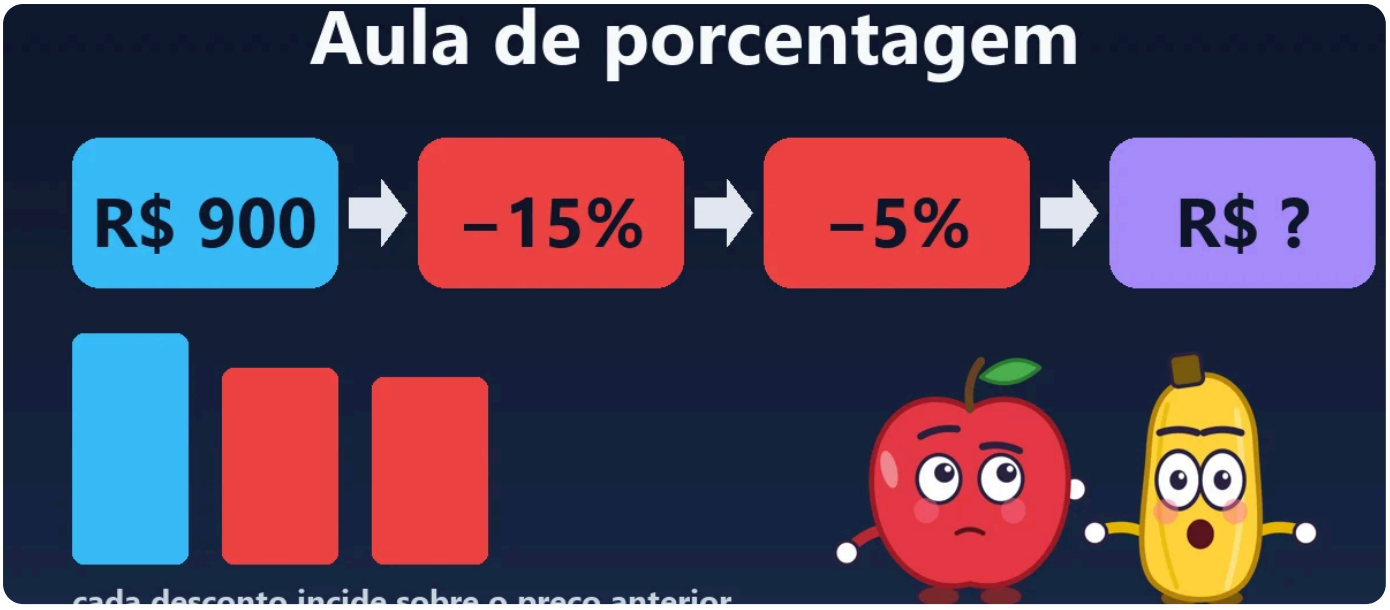


Aula de porcentagem: percentuais sucessivos e juros

Resposta rápida: Em percentuais sucessivos, cada porcentagem é calculada sobre o valor que sobrou da anterior, por isso elas não se somam. No juro simples, o juro é sempre calculado sobre o capital, e no juro composto o juro de cada mês também rende juro, então o montante é calculado mês a mês.

Descontos que vêm em sequência, reajustes de salário, aplicações e dívidas têm algo em comum: uma porcentagem é aplicada sobre o resultado da anterior. Nesta aula você calcula percentuais sucessivos, descobre de quantos por cento foi o aumento ou o desconto de uma sequência e compara juro simples e juro composto com as suas fórmulas.

Habilidade da BNCC trabalhada nesta aula

EF09MA05 — Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

O preço sobe e depois cai: voltou ao mesmo valor?



Bento

Um fone de R$ 100 subiu 20% e, no mês seguinte, caiu 20%!


R$ 100
subiu 20%
caiu 20%
R$?

Pare e pense

Qual é o preço do fone no fim? Ele voltou a custar R$ 100?

Resposta

Cálculo rápido

Primeiro passo: o aumento de 20% sobre R$ 100. Esse valor é a quinta parte do preço:

$$\frac{100}{5} = 20$$

$$100 + 20 = 120$$

Segundo passo: a queda de 20% sobre R$ 120. Esse valor são 2 blocos de 10%:

$$\frac{120}{10} = 12$$

$$12 + 12 = 24$$

$$120 - 24 = 96$$

Cálculo tradicional

Primeiro passo: o aumento de 20% sobre R$ 100:

$$\frac{20}{100} \times 100 = \frac{20 \times 100}{100} = \frac{2000}{100} = 20$$

$$100 + 20 = 120$$

Segundo passo: a queda de 20% sobre R$ 120, que é o preço depois do aumento:

$$\frac{20}{100} \times 120 = \frac{20 \times 120}{100} = \frac{2400}{100} = 24$$

$$120 - 24 = 96$$

Os dois cálculos dão o mesmo resultado.

O preço final é R$ 96, menor que os R$ 100 do começo: subir e descer a mesma porcentagem não volta ao valor inicial.

Percentuais sucessivos

Quando duas porcentagens são aplicadas uma depois da outra, a segunda é calculada sobre o valor que sobrou da primeira, e não sobre o valor inicial. Por isso as porcentagens não se somam.

Exemplo 1

Um produto custa R$ 400. Ele recebe 20% de desconto e, depois, mais 10% de desconto sobre o novo preço. Qual é o preço final?

Primeiro passo, o desconto de 20%: quanto é 20% de R$ 400?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$20\,\% = \frac{20}{100}$$

Para calcular 20% de 400, multiplicamos o numerador por 400 e dividimos por 100:

$$\frac{20}{100} \times 400 = \frac{20 \times 400}{100} = \frac{8000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{8000}{100} = 80$$

O desconto é de R$ 80. Subtraímos do preço:

$$400 - 80 = 320$$

O segundo passo é calculado sobre este novo preço, R$ 320, e não sobre R$ 400.

Depois passo, o desconto de 10%: quanto é 10% de R$ 320?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$10\,\% = \frac{10}{100}$$

Para calcular 10% de 320, multiplicamos o numerador por 320 e dividimos por 100:

$$\frac{10}{100} \times 320 = \frac{10 \times 320}{100} = \frac{3200}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{3200}{100} = 32$$

O desconto é de R$ 32. Subtraímos do preço:

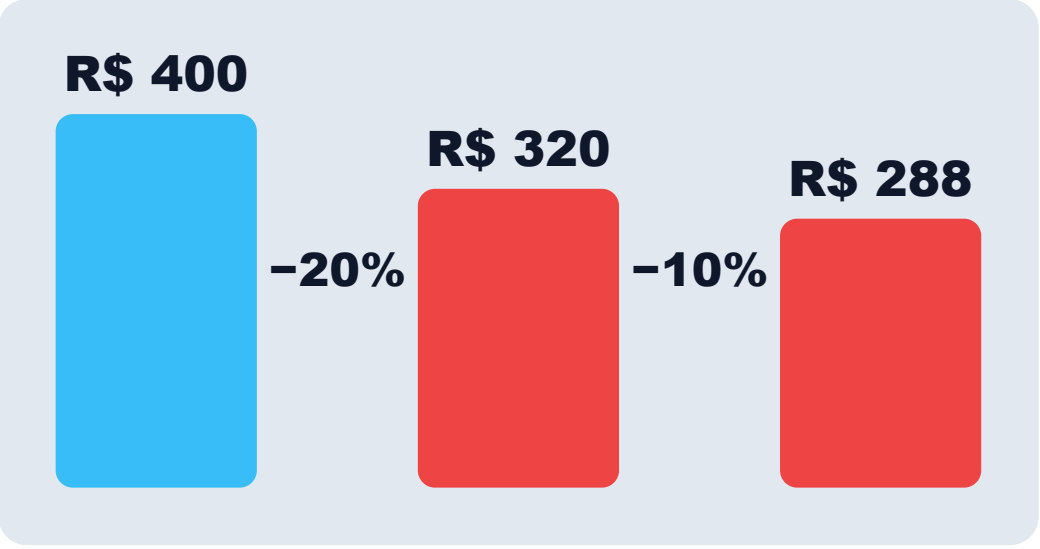
$$320 - 32 = 288$$

O preço final é R$ 288.

Observação: o preço final comparado com o preço inicial, que é o todo.

$$\frac{288}{400} = \frac{72}{100} = 72\%$$

O preço final é 72% do preço inicial, então o desconto em relação ao preço inicial foi de 28%.



Exemplo 2

Um produto custa R$ 250. O preço sobe 10% e, depois, cai 10% sobre o novo preço. Qual é o preço final?

Primeiro passo, o acréscimo de 10%: quanto é 10% de R$ 250?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$10\,\% = \frac{10}{100}$$

Para calcular 10% de 250, multiplicamos o numerador por 250 e dividimos por 100:

$$\frac{10}{100} \times 250 = \frac{10 \times 250}{100} = \frac{2500}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{2500}{100} = 25$$

O acréscimo é de R$ 25. Somamos ao preço:

$$250 + 25 = 275$$

O segundo passo é calculado sobre este novo preço, R$ 275, e não sobre R$ 250.

Depois passo, o desconto de 10%: quanto é 10% de R$ 275?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$10\,\% = \frac{10}{100}$$

Para calcular 10% de 275, multiplicamos o numerador por 275 e dividimos por 100:

$$\frac{10}{100} \times 275 = \frac{10 \times 275}{100} = \frac{2750}{100}$$

Dividir por 100 é deslocar a vírgula duas casas para a esquerda:

$$\frac{2750}{100} = 27{,}5$$

O desconto é de R$ 27,50. Subtraímos do preço:

$$275 - 27{,}5 = 247{,}5$$

O preço final é R$ 247,50.

Observação: o preço final comparado com o preço inicial, que é o todo.

$$\frac{247{,}5}{250} = \frac{99}{100} = 99\%$$

O preço final é 99% do preço inicial, então o desconto em relação ao preço inicial foi de 1%.

Lembre-se

Cada porcentagem é calculada sobre o valor do passo anterior, e os valores encontrados são somados ou subtraídos um de cada vez.

Cuidado!

Dois descontos de 20% e de 10% em sequência não dão 30% de desconto, e um aumento seguido de uma queda de mesma porcentagem não volta ao valor inicial.

De quantos por cento foi o aumento ou o desconto?

Depois de vários ajustes, comparamos o valor final com o valor inicial, que é o todo. Se o valor final passa de 100% do inicial, o que passa de 100% é o aumento. Se fica abaixo de 100%, o que falta para 100% é o desconto.

Exemplo

Um valor de R$ 200 recebe um aumento de 10% e, depois, outro aumento de 10% sobre o novo valor. Qual é o aumento, em porcentagem, em relação ao valor inicial?

Primeiro passo, o acréscimo de 10%: quanto é 10% de R$ 200?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$10\,\% = \frac{10}{100}$$

Para calcular 10% de 200, multiplicamos o numerador por 200 e dividimos por 100:

$$\frac{10}{100} \times 200 = \frac{10 \times 200}{100} = \frac{2000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{2000}{100} = 20$$

O acréscimo é de R$ 20. Somamos ao preço:

$$200 + 20 = 220$$

O segundo passo é calculado sobre este novo preço, R$ 220, e não sobre R$ 200.

Depois passo, o acréscimo de 10%: quanto é 10% de R$ 220?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$10\,\% = \frac{10}{100}$$

Para calcular 10% de 220, multiplicamos o numerador por 220 e dividimos por 100:

$$\frac{10}{100} \times 220 = \frac{10 \times 220}{100} = \frac{2200}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{2200}{100} = 22$$

O acréscimo é de R$ 22. Somamos ao preço:

$$220 + 22 = 242$$

Comparamos o preço final com o preço inicial, que é o todo, 100%.

Escrevemos a parte, que é o preço final, sobre o todo, que é o preço inicial:

$$\frac{242}{200}$$

Os dois são divisíveis por 2:

$$\frac{242}{200} = \frac{242 \div 2}{200 \div 2} = \frac{121}{100}$$

O denominador ficou 100, então a fração já é a porcentagem:

$$\frac{121}{100} = 121\%$$

O preço final é 121% do preço inicial, ou seja, passou de 100%. O que passa de 100% é o aumento:

$$121\,\% - 100\,\% = 21\%$$

O aumento foi de 21%.

Pare e pense

Um produto de R$ 200 recebe um aumento de 50% e, depois, outro aumento de 20% sobre o novo valor. Qual é o aumento, em porcentagem, em relação ao preço inicial?

Resposta

Cálculo rápido

Primeiro passo: o aumento de 50% é a metade do preço:

$$\frac{200}{2} = 100$$

$$200 + 100 = 300$$

Segundo passo: o aumento de 20% sobre R$ 300 são 2 blocos de 10%:

$$\frac{300}{10} = 30$$

$$30 + 30 = 60$$

$$300 + 60 = 360$$

Cálculo tradicional

Primeiro passo: o aumento de 50% sobre R$ 200:

$$\frac{50}{100} \times 200 = \frac{50 \times 200}{100} = \frac{10000}{100} = 100$$

$$200 + 100 = 300$$

Segundo passo: o aumento de 20% sobre R$ 300, que é o valor depois do primeiro aumento:

$$\frac{20}{100} \times 300 = \frac{20 \times 300}{100} = \frac{6000}{100} = 60$$

$$300 + 60 = 360$$

Os dois cálculos dão o mesmo resultado.

Terceiro passo: comparamos o preço final com o preço inicial, que é o todo:

$$\frac{360}{200} = \frac{18}{10} = 1{,}8 = \frac{180}{100} = 180\%$$

$$180\,\% - 100\,\% = 80\%$$

O aumento é de 80%, e não de 70%.

Juro simples e juro composto

Quando alguém aplica dinheiro ou pega um empréstimo, a quantia inicial é o **capital**, a porcentagem cobrada em cada período é a **taxa**, o valor que se paga ou se ganha pelo uso do dinheiro é o **juro**, e o **montante** é o capital mais o juro que ele rendeu.

Juro simples

No juro simples, o cálculo de cada mês parte sempre do capital do começo, então o juro é o mesmo todos os meses.

Exemplo 1

Uma aplicação de R$ 1000 rende 10% ao mês a juro simples. Qual será o montante depois de 3 meses?

Mês 1: o juro é 10% de R$ 1.000.

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$10\,\% = \frac{10}{100}$$

Para calcular 10% de 1000, multiplicamos o numerador por 1000 e dividimos por 100:

$$\frac{10}{100} \times 1000 = \frac{10 \times 1000}{100} = \frac{10000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{10000}{100} = 100$$

O juro do mês 1 é R$ 100. Somamos ao montante:

$$1000 + 100 = 1100$$

Mês 2: o juro é 10% de R$ 1.000.

$$\frac{10}{100} \times 1000 = \frac{10 \times 1000}{100} = \frac{10000}{100} = 100$$

O juro do mês 2 é R$ 100. Somamos ao montante:

$$1100 + 100 = 1200$$

Mês 3: o juro é 10% de R$ 1.000.

$$\frac{10}{100} \times 1000 = \frac{10 \times 1000}{100} = \frac{10000}{100} = 100$$

O juro do mês 3 é R$ 100. Somamos ao montante:

$$1200 + 100 = 1300$$

O montante é R$ 1300.

Fórmula do juro simples

Chamamos de C o capital, de t o número de meses e de i a taxa de cada mês, em porcentagem: para 10% ao mês, i é 10. O juro J e o montante M são:

$$J = C \times \frac{i}{100} \times t$$

$$M = C + J$$

Para o exemplo, colocamos na fórmula C = 1000, i = 10 e t = 3:

$$J = 1000 \times \frac{10}{100} \times 3 = 100 \times 3 = 300$$

$$M = 1000 + 300 = 1300$$

É o mesmo montante que encontramos mês a mês.

Juro composto

No juro composto, a taxa de cada mês é aplicada sobre o montante do mês anterior, ou seja, o juro também rende juro.

Exemplo 2

Uma aplicação de R$ 1000 rende 10% ao mês a juro composto. Qual será o montante depois de 3 meses?

Mês 1: o juro é 10% de R$ 1.000.

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$10\,\% = \frac{10}{100}$$

Para calcular 10% de 1000, multiplicamos o numerador por 1000 e dividimos por 100:

$$\frac{10}{100} \times 1000 = \frac{10 \times 1000}{100} = \frac{10000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{10000}{100} = 100$$

O juro do mês 1 é R$ 100. Somamos ao montante:

$$1000 + 100 = 1100$$

Mês 2: o juro é 10% de R$ 1.100.

$$\frac{10}{100} \times 1100 = \frac{10 \times 1100}{100} = \frac{11000}{100} = 110$$

O juro do mês 2 é R$ 110. Somamos ao montante:

$$1100 + 110 = 1210$$

Mês 3: o juro é 10% de R$ 1.210.

$$\frac{10}{100} \times 1210 = \frac{10 \times 1210}{100} = \frac{12100}{100} = 121$$

O juro do mês 3 é R$ 121. Somamos ao montante:

$$1210 + 121 = 1331$$

O montante é R$ 1331.

Fórmula do juro composto

Com o mesmo C, t e i, em que i é a taxa de cada mês em porcentagem, o juro de cada mês é calculado sobre o montante do mês anterior, e o montante depois de t meses é:

$$M = C \times \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

Para o exemplo, colocamos na fórmula C = 1000, i = 10 e t = 3. Primeiro resolvemos a soma dentro dos parênteses:

$$1 + \frac{10}{100} = \frac{110}{100} = \frac{11}{10}$$

$$M = 1000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = 1000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$M = 1000 \times \frac{1331}{1000} = 1331$$

É o mesmo montante que encontramos mês a mês.

Comparando os montantes mês a mês:

Mês	Juro simples	Juro composto
1	R$ 1100	R$ 1100

Mês	Juro simples	Juro composto
2	R$ 1200	R$ 1210
3	R$ 1300	R$ 1331

Pare e pense

Um capital de R$ 500 rende 10% ao mês. Qual é o montante depois de 2 meses a juro simples? E a juro composto?

Resposta

Cálculo rápido

No juro simples, o juro é sempre R$ 50, que é 10% de R$ 500:

$$\frac{500}{10} = 50$$

$$500 + 50 + 50 = 600$$

No juro composto, o segundo juro é 10% de R$ 550:

$$500 + 50 = 550$$

$$\frac{550}{10} = 55$$

$$550 + 55 = 605$$

Cálculo tradicional

Juro simples:

$$\frac{10}{100} \times 500 = \frac{10 \times 500}{100} = \frac{5000}{100} = 50$$

$$500 + 50 + 50 = 600$$

Juro composto:

$$\frac{10}{100} \times 500 = \frac{10 \times 500}{100} = \frac{5000}{100} = 50$$

$$500 + 50 = 550$$

$$\frac{10}{100} \times 550 = \frac{10 \times 550}{100} = \frac{5500}{100} = 55$$

$$550 + 55 = 605$$

Os dois cálculos dão o mesmo resultado.

No juro simples, o montante é R$ 600, e no juro composto é R$ 605.

Lembre-se

O juro composto cresce mais rápido porque o juro de cada mês também rende juro nos meses seguintes. Em dívidas, isso faz o valor devido aumentar cada vez mais depressa.

Planilha: juro composto mês a mês

Uma planilha repete o cálculo de cada mês com uma fórmula copiada para baixo. Veja o juro composto de 10% ao mês sobre R$ 1000:

	A	B
1	**Mês**	**Montante (R$)**
2	0	1000
3	1	1100
4	2	1210
5	3	1331

Na célula `B3`, a fórmula `=B2+B2*10%` soma ao montante anterior o juro de 10% sobre ele, e dá 1100. Copiando a fórmula para as células de baixo, a planilha calcula os meses seguintes, sempre sobre o montante do mês anterior. O mesmo cálculo cabe em uma única fórmula, que usa o capital em `B2` e a potência do número de meses: `=B2*(1+10%)^3`.

Para o juro simples, o juro é sempre sobre o capital inicial, que está em `B2`, e a fórmula do mês seguinte soma esse mesmo juro: `=B3+$B$2*10%`.

Para conferir um cálculo isolado, use a **calculadora de porcentagem** do site.

Problemas do dia a dia

Agora vamos usar o que aprendemos em situações do dia a dia.

Problema 1

Uma geladeira custa R$ 800. Ela tem 25% de desconto e, na compra à vista, mais 20% de desconto sobre o novo preço. Qual é o preço final?

Primeiro passo, o desconto de 25%: quanto é 25% de R$ 800?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$25\,\% = \frac{25}{100}$$

Para calcular 25% de 800, multiplicamos o numerador por 800 e dividimos por 100:

$$\frac{25}{100} \times 800 = \frac{25 \times 800}{100} = \frac{20000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{20000}{100} = 200$$

O desconto é de R$ 200. Subtraímos do preço:

$$800 - 200 = 600$$

O segundo passo é calculado sobre este novo preço, R$ 600, e não sobre R$ 800.

Depois passo, o desconto de 20%: quanto é 20% de R$ 600?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$20\,\% = \frac{20}{100}$$

Para calcular 20% de 600, multiplicamos o numerador por 600 e dividimos por 100:

$$\frac{20}{100} \times 600 = \frac{20 \times 600}{100} = \frac{12000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{12000}{100} = 120$$

O desconto é de R$ 120. Subtraímos do preço:

$$600 - 120 = 480$$

O preço final é R$ 480.

Observação: o preço final comparado com o preço inicial, que é o todo.

$$\frac{480}{800} = \frac{60}{100} = 60\%$$

O preço final é 60% do preço inicial, então o desconto em relação ao preço inicial foi de 40%.

Problema 2

Um salário de R$ 2000 recebe um aumento de 15% e, depois, outro de 20% sobre o novo valor. Qual é o salário final?

Primeiro passo, o acréscimo de 15%: quanto é 15% de R$ 2.000?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$15\,\% = \frac{15}{100}$$

Para calcular 15% de 2000, multiplicamos o numerador por 2000 e dividimos por 100:

$$\frac{15}{100} \times 2000 = \frac{15 \times 2000}{100} = \frac{30000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{30000}{100} = 300$$

O acréscimo é de R$ 300. Somamos ao preço:

$$2000 + 300 = 2300$$

O segundo passo é calculado sobre este novo preço, R$ 2.300, e não sobre R$ 2.000.

Depois passo, o acréscimo de 20%: quanto é 20% de R$ 2.300?

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$20\,\% = \frac{20}{100}$$

Para calcular 20% de 2300, multiplicamos o numerador por 2300 e dividimos por 100:

$$\frac{20}{100} \times 2300 = \frac{20 \times 2300}{100} = \frac{46000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{46000}{100} = 460$$

O acréscimo é de R$ 460. Somamos ao preço:

$$2300 + 460 = 2760$$

O preço final é R$ 2.760.

Observação: o preço final comparado com o preço inicial, que é o todo.

$$\frac{2760}{2000} = \frac{138}{100} = 138\%$$

O preço final é 138% do preço inicial, então o aumento em relação ao preço inicial foi de 38%.

Problema 3

Uma aplicação de R$ 2000 rende 5% ao mês a juro composto. Qual será o montante depois de 2 meses?

Mês 1: o juro é 5% de R$ 2.000.

Porcentagem é uma fração com denominador 100:

$$5\,\% = \frac{5}{100}$$

Para calcular 5% de 2000, multiplicamos o numerador por 2000 e dividimos por 100:

$$\frac{5}{100} \times 2000 = \frac{5 \times 2000}{100} = \frac{10000}{100}$$

Dividir por 100 é cortar os dois zeros:

$$\frac{10000}{100} = 100$$

O juro do mês 1 é R$ 100. Somamos ao montante:

$$2000 + 100 = 2100$$

Mês 2: o juro é 5% de R$ 2.100.

$$\frac{5}{100} \times 2100 = \frac{5 \times 2100}{100} = \frac{10500}{100} = 105$$

O juro do mês 2 é R$ 105. Somamos ao montante:

$$2100 + 105 = 2205$$

O montante é R$ 2205.

Retomando o que aprendeu

Confira se você já consegue fazer cada item:

Explicar por que duas porcentagens em sequência não se somam.

Calcular o valor final depois de descontos e aumentos sucessivos.

Descobrir de quantos por cento foi o aumento ou o desconto depois de vários ajustes.

Calcular o montante a juro simples.

Calcular o montante a juro composto, mês a mês.

Comparar juro simples e juro composto.

Dúvidas comuns

Por que duas porcentagens seguidas não se somam?

Porque a segunda porcentagem é calculada sobre o valor que sobrou da primeira, e não sobre o valor inicial. Um desconto de 20% seguido de outro de 10% não dá 30% de desconto.

Qual é a diferença entre juro simples e juro composto?

No juro simples, o cálculo de cada mês parte sempre do capital, então o juro é o mesmo todos os meses. No juro composto, o juro de cada mês é calculado sobre o montante do mês anterior, ou seja, o juro também rende juro.

Qual é a fórmula do juro simples?

O juro é $J = C \times \frac{i}{100} \times t$, em que C é o capital, i é a taxa de cada mês em porcentagem e t é o número de meses. O montante é $M = C + J$.

Qual é a fórmula do juro composto?

O montante depois de t meses é $M = C \times \left(1 + \frac{i}{100}\right)^{t}$, em que C é o capital, i é a taxa de cada mês em porcentagem e t é o número de meses.